

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

59e jaargang
1983/1984
nr. 9
mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs. F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, giro: 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar en worden u, vergezeld van een acceptgirokaart, toegezonden.

Abonnementen worden automatisch verlengd, tenzij zij schriftelijk worden opgezegd voor 1 december.

Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Programmeren in de bovenbouw van het VO

C. H. A. KOSTER , T. KRISTEL

Inleiding

In het artikel 'Informatica in de bovenbouw van het VO', dat verscheen in het Euclidesnummer van oktober 1983, werd een aantal fasen in de gang van probleemstelling naar programma onderscheiden. In het huidige artikel worden die fasen geconcretiseerd aan de hand van een klein voorbeeld, dat volledig uitgewerkt wordt, en een groter voorbeeld waarvan enige fragmenten worden uitgewerkt.

Het reeds genoemde artikel vermeldt dat de probleemstellingen bij voorkeur toepassingsgericht en zo echt mogelijk dienen te zijn. Alhoewel er zeer vele toepassingen zijn, die als blauwdruk voor probleemstellingen kunnen fungeren, hebben we er in het kader van dit artikel toch vanaf gezien om van een realistisch probleem uit te gaan: aangezien het lezerspubliek van Euclides waarschijnlijk relatief weinig informatici bevat, zou een te groot deel van dit artikel gewijd hebben moeten zijn aan de explicitering van de probleemstelling. Derhalve hebben we probleemstellingen gekozen die voor wiskundeleraren vrijwel geen uitleg behoeven.

Aan de andere kant hebben we niet geprobeerd om dit artikel ook leesbaar te maken voor wiskundeleraren zonder programmeerervaring. Het is niet mogelijk om in kort bestek naar een aantal centrale begrippen uit de methodologie van het programmeren te kijken zonder enige (elementaire) kennis van zaken te veronderstellen.

Als programmeertaal wordt gebruik gemaakt van ELAN. Deze taal is onder leiding van één van de auteurs (C. H. A. Koster) aan de Technische Universiteit Berlijn speciaal ontwikkeld ten behoeve van het programmeeronderwijs in de bovenbouw van het VO. Wij hopen dat de voorbeelden ook zonder specifieke kennis van ELAN begrijpelijk zijn. Overigens is de zo direct aan de orde komende programmeermethodologie volledig onafhankelijk van de gebruikte programmeertaal. Alleen zul je meer moeite hebben om het ontworpen programma met behoud van abstractie en struktuur in (bijvoorbeeld) BASIC te noteren dan in (bijvoorbeeld) ELAN, omdat de uitdrukkingsmiddelen van ELAN deze methodologie direct ondersteunen.

Een voorbeeld van een een-laags algoritme

De meeste praktijk algoritmen worden uit twee of meer lagen opgebouwd. We zullen na de voorbeelden duidelijk maken wat we met lagen bedoelen. Slechts de allereenvoudigste algoritmen kunnen, zonder over een lagenindeling te spreken, goed beschreven worden. Hieronder een eenvoudig voorbeeld van een dergelijk algoritme. Dit algoritme stelt voor een positief geheel getal vast of het al dan niet een priemgetal is. Het algoritme bestaat uit een ruwe formulering gevolgd door een aantal *verfijningen*.

```
lees getal;
bepaal of getal priem is;
druk antwoord af.

lees getal:
  INT VAR getal; get(getal).

bepaal of getal priem is:
  formuleer beginvoorwaarden;
  WHILE nog delers te proberen
  REPEAT
    kijk of deling opgaat;
    neem volgende kandidaat deler
  ENDREPEAT.

kijk of deling opgaat:
  IF deling gaat op
  THEN deler gevonden := TRUE;
       LEAVE bepaal of getal priem is
  ENDIF.

deling gaat op:
  getal MOD kand deler = 0.

neem volgende kandidaat deler:
  kand deler INCR 1.

nog delers te proberen:
  kand deler * kand deler < getal.

formuleer beginvoorwaarden:
  BOOL VAR deler gevonden :: FALSE;
  INT VAR kand deler :: 2.
```

```
druk antwoord af:
   IF deler gevonden
   THEN put ("geen priemgetal")
   ELSE put ("priemgetal")
   ENDIF.
```

Allereerst enige korte opmerkingen over de gebruikte taalmiddelen:

- Een **INT VAR** (integer variabele) is een variable die als definitiegebied een verzameling van de vorm $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq m\}$ heeft; de constante m is daarbij afhankelijk van de gebruikte computer.
- Een **BOOL VAR** (boolean variable) is een variabele die als definitiegebied de verzameling {**TRUE, FALSE**} heeft.
- Zo gauw een deling blijkt op te gaan wordt de herhaling afgebroken, doordat het deelalgoritme **bepaal of getal priem is** van binnen uit wordt beëindigd met een **LEAVE**-opdracht.
- Voor positieve gehele getallen **a** en **b** levert de operatie **a MOD b** de rest op bij deling van **a** door **b**.
- Voor elk geheel getal **a** heeft operatie **a INCR 1** hetzelfde effect als **a := a + 1.**
- De funktie **get** leest waarden van het invoerapparaat; de funktie **put** drukt waarden op het uitvoerapparaat af.

Afgezien van de onwennigheid tegenover de gebruikte taalmiddelen is het eerste dat opvalt dat de denkstappen van de programmeur een onderdeel van het algoritme vormen. Om te zien wat dit inhoudt is het verstandig om te kijken naar een overigens correcte formulering van het algoritme waaruit die denkstappen zijn weggelaten.

```
INT VAR getal; get(getal);
BOOL VAR deler gevonden := FALSE;
INT VAR kand deler :: 2;
WHILE (kand deler * kand deler < getal) AND NOT deler gevonden
REPEAT
   IF getal MOD kand deler = 0
   THEN deler gevonden := TRUE
   ENDIF;
   kand deler INCR 1
ENDREPEAT;
IF deler gevonden
THEN put("geen priemgetal")
ELSE put("priemgetal")
ENDIF.
```

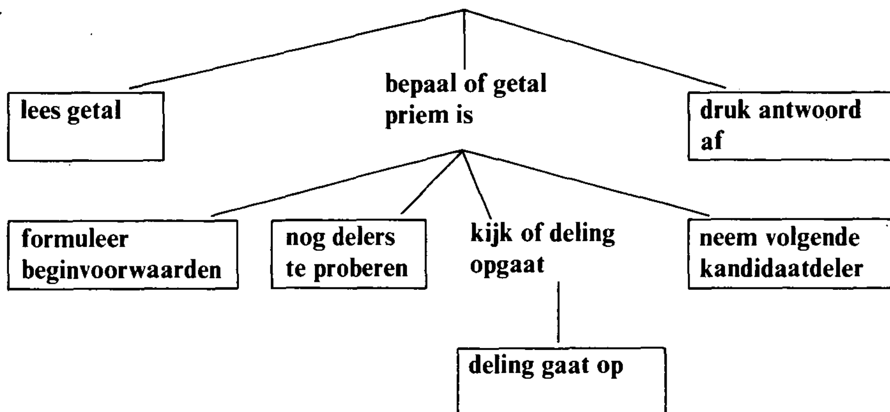
De **LEAVE**-opdracht kon hier niet worden toegepast, bij ontstentenis van een naam voor het te verlaten deelalgoritme. In plaats daarvan wordt de waarde van de variabele **deler gevonden** gebruikt om onnodige herhalingen te vermijden.

Het essentiële verschil tussen beide formuleringen dient wiskundeleraren aan te

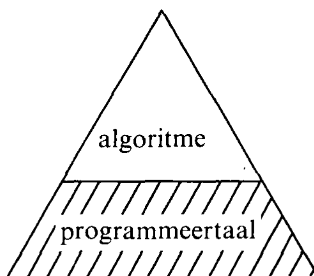
spreken: het is het verschil tussen de leerling die opschrijft hoe hij aan zijn antwoord is gekomen en de leerling die enkel het antwoord opschrijft. We zien er van af om de voordelen van de methode van de stapsgewijze verfijning verder te bepleiten, alhoewel meer motieven een rol spelen. Met name is deze methode een erg geschikte heuristiek (dus géén gesloten afleidingssysteem) om tot een correct algoritme te komen.
Eigenlijk heeft de leerling, die bovenstaand algoritme aflevert, nog wel iets van zijn denkstappen laten zien door middel van de keuze van zijn namen voor variabelen. Vergelijk bovenstaand algoritme maar eens met onderstaand algoritme.

```
INT VAR a; get(a);
BOOL VAR b :: FALSE;
INT VAR c :: 2;
WHILE (c * c < a) AND b
REPEAT
  b := a MOD c = 0;
  c INCR 1
ENDREPEAT;
IF b
THEN put("geen priemgetal")
ELSE put("priemgetal")
ENDIF.
```

Afgezien van de declaraties en de goede besturingsstructuren (zoals de herhaling en de keuze) begint dit al aardig op een klassiek BASIC programma te lijken. Het is dan ook veel te gemakkelijk over het hoofd te zien dat op de vierde regel een NOT-teken ontbreekt! Hopelijk maakt deze laatste versie duidelijk waarom informatici een broertje dood hebben aan de in de wiskunde gebruikelijke zeer korte naamsgevingen. Want zonder ook dit punt verder uit te diepen, stellen we vast dat onder informatici het vinden van sprekende namen voor (deel)-algoritmen, variabelen en constanten van eminent belang wordt geacht. Een naam moet verbaliseren welke funktie het benoemde in het grote geheel heeft. Het vinden van goede verbaliseringen is een kunst die niet zonder oefening gebaard wordt.
Het benoemen van deelalgoritmen, vóórdat dat deelalgoritme feitelijk gedefinieerd wordt in termen van andere deelalgoritmen, is een vorm van abstractie die typisch is voor de informatica. De naam van het deelalgoritme geeft aan *wat* zijn funktie is. Pas later, bij de definitie, maken we ons er druk over *hoe* die funktie gerealiseerd wordt.
Tenslotte komen we terug op het 'één-laags karakter' van dit via verfijningen ontwikkelde algoritme. De verfijningsstruktuur is te tekenen als een omgekeerde boom waarvan de bladeren in hokjes getekend staan.



Deze bladeren stellen deelalgoritmen voor die eenvoudig genoeg zijn om onmiddellijk in de gebruikte programmeertaal gecodeerd te worden. De gebruikte *methode van de stapsgewijze verfijning* brengt met zich mee dat een algoritme opgesplitst wordt in deelalgoritmen, waarvan een aantal tenslotte gerealiseerd worden met behulp van o.a. de primitieve algoritmen die de gebruikte programmeertaal ter beschikking stelt. Schematisch is dat als volgt aan te geven:



Dank zij het feit dat de taal ELAN de verfijning als syntactische constructie kent wordt het verfijnproces niet als een papier-en-potlood exercitie bedreven zoals bij de meer gebruikelijk 'in situ' verfijningstechniek, zie bijv. [Wirth], maar vormen de verfijningen een blijvend bestanddeel van het programma.
Het feit dat de bladeren van de verfijningsboom direct in termen van de gebruikte programmeertaal gerealiseerd worden geeft aan dat het algoritme uit één laag bestaat. Na het tweede voorbeeld zal dit duidelijker zijn.

Een voorbeeld van een twee-laags algoritme

Probleemstelling
In de bovenbouw van havo en vwo wordt de leerling met wiskunde in het pakket geconfronteerd met meetkundige objekten in $\mathbf{R}_2$ van het type punt en het type (rechte) lijn, en met relaties tussen die objekten. Let op het voor de informatica essentiële taalgebruik: de vergelijking $\mathbf{y} = -\mathbf{x} + \mathbf{1}$ stelt een *objekt* van het *type*

LIJN voor. Zo komen ook punten, d.w.z. objekten van het type **PUNT**, voor. Het verschil tussen objekt en type is als het verschil tussen element en verzameling, met dien verstande dat een type typisch méér is dan een kale verzameling objekten: ook de voor een type karakteristieke operaties behoren daartoe.
De probleemstelling laten we bewust nogal open. Rond de typen **punt** en **lijn** moet een meetkundig informatiesysteem gebouwd worden. Bijvoorbeeld: bij invoer van de gegevens

punt **P** met coördinaten **(1, −2)**
lijn **l** met vergelijking **x + y = 1**

willen we de volgende informatie verkrijgen:

P ligt niet op **l**
de loodlijn **m** door **P** op **l** heeft vergelijking **y = x − 3**
m snijdt **l** in het punt met coördinaten **(2, −1)**
de afstand van **P** tot **m** is ongeveer **1.41**

Probleemanalyse
In een dergelijke nogal open probleemstelling zitten van nature veel vrijheden, zowel wat interpretatie als wat oplossingsmethode betreft. Daar komt nog bij dat de probleemstelling eenvoudig uitbreidbaar is tot $\mathbf{R}_3$. Wij beperken ons tot één bepaalde interpretatie en één bepaalde oplossingsmethode.

a Invoer
De invoer bestaat steeds uit 2 (representaties voor) objekten, die elk van het type **PUNT** of **LIJN** mogen zijn. Een objekt van het type **PUNT** wordt ingevoerd als een geordend paar van twee rationale getallen (d.w.z. objekten van het type **REAL**). Een objekt van het type **LIJN** kan op drie manieren ingevoerd worden:
- een opeenvolging van 2 objekten van het type **PUNT**
- een opeenvolging van een objekt van het type **VEKTOR**, die een normaalvektor voorstelt, en een objekt van het type **REAL**, die het bijbehorende rechterlid van de vergelijking voorstelt
- een opeenvolging van 2 objekten van het type **VEKTOR**, die richtingsvektor resp. steunvektor voorstellen.

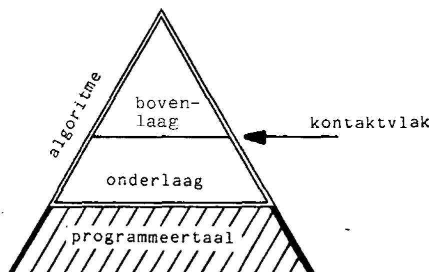
b Uitvoer
De uitvoer bestaat uit de relatie tussen beide objekten en de daarbij horende informatie. We onderscheiden de volgende gevallen:
- Er zijn 2 punten P_1 en P_2 ingevoerd. Dan wil je uitsluitsel of P_1 en P_2 al dan niet samenvallen. Voorts wil je de afstand tussen P_1 en P_2, benevens een vergelijking en vektorvoorstelling van de lijn door P_1 en P_2, weten.
- Er zijn een punt P en een lijn l ingevoerd. Dan wil je uitsluitsel of P al dan niet op l ligt. Voorts wil je een vergelijking en vektorvoorstelling van de loodlijn m door P op l weten. Tenslotte is het snijpunt van m en l, benevens de afstand van P tot l, interessant.

– Er zijn 2 lijnen l_1 en l_2 gegeven. Dan wil je weten of l_1 en l_2 evenwijdig zijn of snijden. In het geval van evenwijdigheid wil je de afstand tussen beide lijnen weten. In het geval van snijden wil je het snijpunt en de hoek tussen beide lijnen in graden, minuten en seconden weten.

c Ruwe oplossingsstrategie
Het startpunt voor de methode van de stapsgewijze verfijning is de ruwe oplossingsstrategie.

ontsluit informatiesysteem;
maak kontakt met gebruiker;
WHILE gebruiker stelt vraag
REPEAT
  beantwoord vraag;
  geef gelegenheid om vraag te stellen
ENDREPEAT.

d Verdeling van het algoritme in lagen
Als je gaat proberen om de ruwe oplossingsstrategie verder te verfijnen, kom je al gauw in de problemen: er zijn teveel vrijheidsgraden zodat het aantal mogelijke ontwerpbeslissingen te groot wordt. En zelfs al lukt het je om via consistente ontwerpbeslissingen het algoritme te ontwikkelen, dan wordt het aantal verfijningen zo groot dat de overzichtelijkheid verdwijnt. Een teken aan de wand is vaak dat het lastig wordt om goede namen voor de verfijningen te verzinnen.
Kortom: het algoritme is te groot om systematische ontwikkeling volgens de methode van de stapsgewijze verfijning toe te staan. Van de kant van de leraar is een behoorlijke programmeerervaring nodig om in een vroegtijdig stadium dit probleem te herkennen en de nu volgende oplossingsmethode goed te hanteren.
De beschreven symptomen duiden er op dat het algoritme in twee of meer lagen verdeeld dient te worden. Essentieel is dat die lagen uitsluitend met elkaar communiceren via een welgedefinieerd *kontaktvlak* (Engels: interface). Een belangrijk gevolg is dat die lagen onafhankelijk van elkaar geprogrammeerd kunnen worden mits dat kontaktvlak volledig gespecificeerd is. De specificatie van kontaktvlakken behoort tot de probleemanalyse.
Onze probleemstelling leent zich uitstekend voor een opdeling in 2 lagen.



De beide lagen, inclusief het kontaktvlak, zullen wij slechts zeer gedeeltelijk beschrijven.
In het algemeen bestaat een kontaktvlak uit:

1 De nieuwe samengestelde typen (zoals **VEKTOR**, **PUNT** en **LIJN**).
2 Algoritmen die (nieuwe) objekten van deze typen samenstellen uit hun componenten (zogenaamde *constructie-algoritmen*).

Voorbeeld: Er zijn 2 reals nodig om een vektor vast te leggen. De vastlegging gebeurt via een procedure met de naam vektor

VEKTOR PROC vektor (REAL CONST x, y)

die voor gegeven real waarden **x** en **y** een objekt van het type **VEKTOR** maakt.

Voorbeeld: Een lijn wordt vastgelegd door een vergelijking. Een vergelijking wordt vastgelegd door een normaalvektor en een bijbehorend rechterlid. Die vastlegging gebeurt via een procedure

LIJN PROC lijn (VEKTOR CONST norm vektor,
REAL CONST rechterlid)

die voor een gegeven normaalvektor en een bijbehorend rechterlid een objekt van het type **LIJN** maakt.

3 Algoritmen die toegang geven tot de componenten waaruit objekten van deze nieuwe typen zijn samengesteld (zogenaamde *toegangs-algoritmen*).

Voorbeeld: De operator met de naam **X**

REAL OP X (VEKTOR CONST v)

levert, werkende op een object van het type **VEKTOR**, de x-coördinaat van dat objekt op. Analoog wordt de operator **Y** gedefinieerd.

Voorbeeld: De operator met de naam **NORMV**

VEKTOR OP NORMV (LIJN CONST 1)

levert, werkende op een object van het type **LIJN**, een normaalvektor horende bij dat objekt, op.

4 Algoritmen die eigenschappen van deze nieuwe typen, en hun relaties, vastleggen.

Voorbeeld: De binaire operator

BOOL OP LIGTOP (PUNT CONST p, LIJN CONST 1)

levert, werkende op een objekt van het type **PUNT** en een objekt van het type **LIJN**, de waarheidswaarde op van de bewering '**p** ligt op **l**'.

Voorbeeld: De procedure

REAL PROC determinant (VEKTOR CONST v, w)

levert bij 2 gegeven kolomvektoren hun determinant op.

Uit deze voorbeelden blijkt dat een kontaktvlak een aantal nieuwe typen en algoritmen specificeert, die 'goed op het probleem passen'. Die specificatie is essentieel beperkt. De bovenlaag mag alleen maar weten *wat* de funktie van deze typen en algoritmen is. *Hoe* die typen en algoritmen gerealiseerd worden is een kwestie die met het ontwerp van de onderlaag samenhangt. Het is verboden dat de bovenlaag gebruik maakt van kennis die niet in de specifikatie van het kontaktvlak vermeld staat. Het is dit verbod dat de onafhankelijkheid tussen beide lagen tot stand brengt: een wijziging in de realisering van de nieuwe typen en algoritmen heeft géén consequenties voor de bovenlaag. Deze strikte scheiding van 'wat' en 'hoe' is een vorm van abstraktie die bekend staat onder de naam 'verbergen van informatie' (Engels: information hiding). Moderne programmeertalen zoals ELAN, MODULA-2 en ADA kennen een taalmiddel dat deze vorm van abstraktie voor ons realiseert: het *pakket begrip* c.q. moduul begrip.

De onderlaag is te beschouwen als een uitbreiding van de programmeertaal met een pakket van probleemgerichte typen en algoritmen. Het programmeren van een dergelijke onderlaag geschiedt volgens de *methode van de stapsgewijze synthese* ('bottom-up' methode). Tesamen vormen de door de programmeertaal geleverde taalelementen en de door de onderlaag geleverde probleemgerichte typen en algoritmen een voldoend sterke verzameling primitieve typen en algoritmen om de bovenlaag volgens de methode van de stapsgewijze verfijning te kunnen programmeren. Althans, dat is de bedoeling.

Belangrijk is nog om op te merken dat de methode van de stapsgewijze synthese, in samenhang met een kontaktvlak specificatie, een natuurlijke werkverdeling tussen (groepjes van) leerlingen teweeg brengt. Ook kunnen die groepjes (redelijk) onafhankelijk van elkaar werken.
Een andere werkwijze, die ook bij burgerinformatica een rol zou kunnen spelen, is de volgende: de leraar programmeert een pakket dat een voldoend rijke *omgeving* realiseert waarbinnen de leerlingen een aantal problemen via programma's oplossen.

Uitwerking van een stukje bovenlaag
Om de nadere uitwerking te kunnen begrijpen is het nodig om de voorbeelden bij de kontaktvlak specificatie nog uit te breiden met
- een constructie-algoritme **punt**, dat een **VEKTOR** objekt transformeert in een **PUNT** objekt.
- het toegangs-algoritme **RICHTV**, dat als operator werkend op een **LIJN** objekt een bijbehorende richtingsvektor oplevert.

- het toegangs-algoritme **RECHTL**, dat als operator werkend op een **LIJN** objekt het rechterlid van de vergelijking bepaald door **NORMV** oplevert.
- de binaire operator **IN**, die het inwendig produkt van twee vektoren oplevert.
- het toegangsalgoritme **V**, dat een **PUNT** objekt transformeert in een **VEKTOR** objekt.
- het toegangsalgoritme **STEUNV**, dat als operator werkend op een **LIJN** objekt een punt van die lijn in vektorvorm oplevert.

Ook wordt gebruik gemaakt van de standaard procedure **sqrt** om een vierkantswortel mee te berekenen, en van de standaardoperator ** om een machtsverheffing te bewerkstelligen. (Series van) uitvoerinstrukties worden hier symbolisch aangegeven met **<uitvoer>**.

Uit de schets van de ruwe oplossingsstrategie kiezen we het abstracte algoritme **beantwoord vraag** om nader te verfijnen.

```
beantwoord vraag:
  IF punt punt invoer
  THEN geef punt punt informatie
  ELIF punt lijn invoer
  THEN geef punt lijn informatie
  ELSE geef lijn lijn informatie
  ENDIF.

geef punt lijn informatie:
  geef relatie tussen punt p en lijn l;
  geef vektor voorstelling van loodlijn m;
  geef vergelijking van loodlijn m;
  geef snijpunt van lijn l en loodlijn m;
  geef afstand van punt p tot lijn l.

geef relatie tussen punt p en lijn l:
  IF p LIGTOP l
  THEN put("p ligt op l")
  ELSE put("p ligt niet op l")
  ENDIF.

geef vektor voorstelling van loodlijn m:
  VEKTOR CONST richtvektor m :: vektor (Y (RICHTV l), -X
                                                    (RICHTV l)),
               steunvektor m :: vektor (X p, Y p);
  LIJN CONST m :: lijn (richtvektor m, steunvektor m);
  <uitvoer>.

geef vergelijking van loodlijn m:
  VEKTOR CONST norm vektor m :: RICHTV l;
  REAL CONST recht lid m :: norm vektor m IN steunvektor m;
  <uitvoer>.
```

```
geef snijpunt van lijn l en loodlijn m:
   REAL CONST deler :: determinant (NORMV m, NORMV l),
     x deeltal :: determinant (vektor (RECHTL l, RECHTL m),
                              vektor (Y (NORMV m), Y (NORMV l))),
     y deeltal :: determinant (vektor (X (NORMV m), X (NORMV l)),
                              vektor (RECHTL l, RECHTL m));
   PUNT CONST snijpt lm ::
                 punt (vektor (x deeltal / deler, y deeltal / deler));
   <uitvoer>.

geef afstand van punt p tot lijn l:
   REAL CONST afstand pl :: sqrt (((X p - X snijpt lm)**2 +
                                   (Y p - Y snijpt lm)**2));
   <uitvoer>.
```

Realisatie van een stukje onderlaag
We hebben er voor gekozen om uitsluitend de voorbeelden uit de kontaktvlak specificatie uit te werken. De onderlaag zelf wordt gerealiseerd als één **PACKET** met de naam **vlakke vektormeetkunde**.
De namen van de typen en algoritmen, die in de bovenlaag mogen worden gebruikt, staan in de zogenaamde **DEFINES** lijst.

De nieuwe typen **VEKTOR** en **PUNT** worden gedefinieerd als een rijtje van 2 reals.
Het nieuwe type **LIJN** wordt gedefinieerd als een geordende struktuur bestaande uit 2 velden van het type **VEKTOR**, met de veldnamen **richtvektor** en **steunvektor**.

Deze informatie is onvoldoende om alle details van onderstaande programmatekst precies te kunnen plaatsen. Zij is echter hopelijk voldoende om uw intuïtie de nog missende details met voor de hand liggende gissingen te laten opvullen. Om een dergelijk pakket te kunnen schrijven is uiteraard gericht onderwijs in de 'bottom-up' methode nodig. Binnen een toekomstige omgeving van ELAN gebruikers zullen dergelijke pakketten vrij circuleren. Zij vormen een betere basis voor de uitwisseling van leermateriaal dan kant en klare programma's.

```
PACKET vlakke vektormeetkunde
DEFINES VEKTOR, PUNT, LIJN, vektor, punt, lijn, X, Y, V,
        RICHTV, STEUNV, NORMV, RECHTL, LIGTOP, IN,
        determinant.

TYPE VEKTOR = ROW 2 REAL;
TYPE PUNT = ROW 2 REAL;
TYPE LIJN = STRUCT (VEKTOR richtvektor, steunvektor);

REAL CONST epsilon :: 10 * small real;
```

```
VEKTOR PROC vektor (REAL CONST x, y):
  VEKTOR: [x, y]
ENDPROC vektor;

LIJN PROC lijn (VEKTOR CONST normvektor, REAL CONST
rechterlid):
  VEKTOR CONST richtvektor::
    vektor ( – Y normvektor, X normvektor);
  VEKTOR VAR steunvektor;
  IF ABS (X normvektor) < epsilon
  THEN steunvektor := vektor (0, rechterlid / (Y normvektor))
  ELSE steunvektor := vektor (rechterlid / (X normvektor), 0)
  ENDIF;
  LIJN: [richtvektor, steunvektor]
ENDPROC lijn;

REAL OP X (VEKTOR CONST v):
  v[1]
ENDOP X;

...

VEKTOR OP NORMV (LIJN CONST l):
  VEKTOR CONST n :: vektor (Y (RICHTV l), –X (RICHTV l);
  n / LENGTE n
ENDOP NORMV;

BOOL OP LIGTOP (PUNT CONST p, LIJN CONST l):
  is afhankelijk (V p – STEUNV l, RICHTV l)
ENDOP LIGTOP;

REAL PROC determinant (VEKTOR CONST v, w):
  (X v) * (Y w) – (X w) * (Y v)
ENDPROC determinant;

VEKTOR OP / (VEKTOR CONST v, REAL CONST d):
  vektor ((X v) / d, (Y v) / d)
ENDOP / ;

REAL OP LENGTE (VEKTOR CONST v):
   sqrt (v IN v)
ENDOP LENGTE;

BOOL PROC is afhankelijk (VEKTOR CONST v, w):
  ABS determinant (v, w) < epsilon
ENDPROC is afhankelijk;
```

```
VEKTOR OP - (VEKTOR CONST v, w):
  vektor (X v - X w, Y v - Y w)
ENDOP -

ENDPACKET vlakke vektormeetkunde;
```

Merk op dat het **PACKET** (minstens) een viertal algoritmen definieert die niet in de **DEFINES** lijst voorkomen maar, evenals de real waarde **epsilon**, een lokale rol spelen om het kontaktvlak te helpen realiseren. Uiteraard zijn deze algoritmen niet in de bovenlaag te gebruiken.
Meer voorbeelden van de definitie van pakketten zijn te vinden in [Lindsey/van der Meulen] en [Koster/Meijer].

Slotbeschouwing

Discussies rond de methodologie van het programmeren hebben zich vaak afgespeeld in de nogal beperkte arena van de besturingsstructuren voor algoritmen. Binnen de informatica is die discussie feitelijk gesloten. Weinigen zullen nog willen ontkennen dat, mits de programmeertaal aan een aantal voor de hand liggende eisen voldoet, de
- opeenvolging
- keuze
- herhaling

een voldoend sterke èn gewenste verzameling besturingsstructuren vormt.

Vandaar dat we er in dit artikel voor gekozen hebben om op meer wezenlijke zaken m.b.t. programmeermethodologie in te gaan. Er zijn hier 2 complementaire ontwikkelingsstrategieën besproken:
- methode van stapsgewijze verfijning ('top-down methode')
- methode van stapsgewijze synthese ('bottom-up methode').

Kenmerkend voor beide strategieën is het expliciete gebruik van *abstractie* in de zin van: het bewust afzien van details. De belangrijkste voorbeelden zijn:
- benoemen van typen en algoritmen onafhankelijk van hun realisatie
- verbergen van informatie over de realisering van typen en algoritmen achter een kontaktvlak
- generaliseren door verschillende algoritmen dezelfde naam te geven.

Het laatste voorbeeld van abstractie is nog niet expliciet aan de orde geweest. De operator – voor twee vektoren is een goed voorbeeld. Die operator was in de programmeertaal ELAN al gedefinieerd voor twee integers, twee reals, één integer, en één real. Daar wordt nu een definitie aan toegevoegd. Dergelijke meervoudig gedefinieerde algoritmen met eenzelfde naam heten generieke algoritmen.

Tot op heden is het expliciete gebruik van abstractie, in de hierboven omschreven betekenis, het voornaamste middel dat informatici ten dienste staat om de ongelooflijke complexiteit van programmatuur en apparatuur beheersbaar te houden.

Literatuur

[Hommel e.a.]
G. Hommel, S. Jähnichen, C. H. A. Koster, *Methodisches Programmieren*, Walter de Gruyter Verlag, 1983.
[Klingen/Liedtke]
L. H. Klingen, J. Liedtke, *Programmieren mit ELAN*, Teubner Verlag, 1983.
[Koster/Meijer]
C. H. A. Koster, H. Meijer, *Systematisch programmeren in ALGOL 68*, deel 2: Recursieve algoritmen en datastructuren, Kluwer, 1981.
[van der Meulen/Lindsey]
S. G. van der Meulen, C. H. Lindsey, *Informal Introduction to ALGOL 68*, Revised Version, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
[Wirth]
N. Wirth, *Algorithmen und Datenstrukturen*, Treubner Verlag, Stuttgart, 1975.

***Over de auteurs*:**
C. H. A. Koster is sinds 1976 hoogleraar in de informatica aan de KU Nijmegen. De processen die zich afspelen bij het leren programmeren hebben zijn bijzondere belangstelling.
T. Kristel is sinds 1976 als docent wiskunde en informatica verbonden aan de NLO Interstudie te Nijmegen. Hij was in 1982 en 1983 gedetacheerd bij de KU Nijmegen, sectie Informatica.

Rekenoperaties in de brugklas

ERNIC KAMERICH

In dit artikel worden manieren van behandelen van eigenschappen van de rekenoperaties besproken, met name van de distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen en aftrekken en van de associativiteit van de vermenigvuldiging. Didactische hulpmiddelen hierbij worden bekeken en ik wil u iets vertellen over mijn ervaringen.
De didactische achtergrond van dit artikel wordt vooral gevormd door de theorie van Galperin over het leren van mentale handelingen [1, 2, 5] en twee punten, die ik in mijn vorige artikel [3] genoemd heb als een leidraad voor het lesgeven in de brugklas in wiskunde:
a de heuristiek: speciale gevallen oplossen; via systematiseren komen tot inzichtelijke generalisatie; toepassen
b de rollen die functies bij het denken al in een zeer elementair stadium in de wiskunde kunnen spelen.

Laten we eerst eens aan de hand van een voorbeeld het gebruik van de rekeneigenschappen in de brugklas nader bekijken.

1 Voorbeeld: een herleiding in de brugklas

In paragraaf 3 van mijn vorige artikel [3] hebben we een oplossingsweg bekeken van de vergelijking:

$$\text{Los op: } ?x \in \mathbb{Q} : x - 8 - 2(3 + 5x) = -27.$$

De eerste stap op de daar gegeven weg is het herleiden van het linkerlid tot iets van de vorm: $\ldots \cdot x + \ldots$.
Laten we zo'n herleiding eens in detail bekijken en analyseren welke stappen daarbij gedaan kunnen/moeten worden.
Het zijn er heel wat, en het vereist een goede vaardigheid van een brugklasleerling om deze alle vlekkeloos uit te voeren en daarbij doelgericht te blijven. Dat besef je te meer wanneer je zo'n herleiding zelf in alle details uitvoert.
Ik wil u, lezer, graag uitnodigen zo'n herleiding zelf even te maken en deze dan te analyseren. Ik geef u hieronder ook mijn herleiding en mijn analyse daarvan.

(Natuurlijk schrijft niemand een herleiding normaal zo uitvoerig op, maar als didactische voorbereiding van lessen in de brugklas over het gebruik van eigenschappen van de operaties vind ik het zelf toch nuttig.)

Eerst interpreteer ik de gegeven formule: ik voeg maal-tekens toe en geef de volgorde van rekenen aan:

$$(x - 8) - (2 \cdot (3 + (5 \cdot x)))$$

Nu ga ik herleiden naar iets van de vorm $\ldots \cdot x + \ldots$.
Ik zal hierbij steeds de rekenvolgorde weer aangeven om niets onder tafel te laten verdwijnen.

$= (x - 8) - ((2 \cdot 3) + (2 \cdot (5 \cdot x))) =$	vermenigvuldigen is distributief over optellen	(1)
$= (x - 8) - (6 + (10 \cdot x)) =$	vermenigvuldigen is associatief	(2)
$= (x + -8) + -(6 + (10 \cdot x)) =$	aftrekken omzetten in optellen	(3)
$= (x + -8) + (-6 + -(10 \cdot x)) =$	tegengestelde van een som	(4)
$= (x + -(10 \cdot x)) + (-8 + -6) =$	optellen is commutatief en associatief	(5)
$= (x + -(10 \cdot x)) + -14 =$	optellen	(6)
$= (x + ((-10) \cdot x)) + -14 =$	tegengestelde van een product	(7)
$= ((1 \cdot x) + (-10 \cdot x)) + -14 =$	term omzetten in scalair product	(8)
$= (-9) \cdot x + -14 =$	vermenigvuldigen is distributief over optellen	(9)

De stappen (1)-(4) zijn gericht op (5) (het herordenen van de termen in een meervoudige optelling); de stappen (7) en (8) zijn gericht op (9); de stappen (6) en (9) samen leiden tot het gestelde doel.
Natuurlijk kan het ook best anders, maar ik geloof dat je als leraar in ieder geval te maken krijgt met:

a *interpretatie van formules* met name t.a.v. de rekenvolgorde en weggelaten operator-tekens. Het is bepaald geen overbodige luxe leerlingen te oefenen in het interpreteren van formules door het toevoegen van maaltekens en het aangeven van de volgorde. Het is bovendien belangrijk m.i. dat ze regelmatig de effecten van volgorde-wisselingen zien. Ik kom hierop terug in een volgend artikel.

b combinatie van associativiteit en commutativiteit van het optellen, praktischer uitgedrukt in de volgende stelling:

'Bij een optelling doet de volgorde waarin je de termen bij elkaar optelt er niet toe'.

(De commutatieve wet en de associatieve wet van de optelling zijn speciale gevallen van deze stelling, en de wiskundige waardeert deze twee als een zuinige basis, waaruit bovenstaande stelling kan worden afgeleid, maar ik vind het zinloos om brugklasleerlingen daarmee lastig te vallen. Wat mij betreft kunnen in de brugklas de commutatieve en associatieve wetten voor de optelling geschrapt worden ten gunste van boven genoemde stelling, en dat geldt eveneens voor de beide overeenkomstige wetten voor de vermenigvuldiging.)
Deze stelling leidt tot een specifieke *heuristiek*:

Het is bij herleidingen (vaak) praktisch om aftrekkingen om te zetten in optellingen.

Een analoge opmerking kan gemaakt worden voor het omzetten van delingen in vermenigvuldigingen.

c allerlei bronnen van fouten. Wellicht kunt u hier vele aanvullingen geven, maar ik wil speciaal noemen:

i verwarring: de distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen/aftrekken versus de associativiteit van het vermenigvuldigen:
voorbeeld: '$2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot x - 3) \cdot (x - 2\frac{1}{2}) = (x - 6) \cdot (2x - 5)$';

ii verwarring: het uitwerken van tegengestelden van sommen en verschillen versus het uitwerken van tegengestelden van producten en quotiënten;
voorbeeld: '$-(6 + 10 \cdot x) = -6 + -10 \cdot -x$'.

iii ongeoorloofde volgorde-wisselingen zoals:
'$2 \cdot (3 + 5 \cdot x) = 6 + 5 \cdot x$'
'$-(6 + 10 \cdot x) = -6 + 10 \cdot x$'
'$10 \cdot x - x = 10$' (merkwaardig: niet eens '$10 \cdot 0$'!).

Het lijkt een verstandige strategie om de dingen die leerlingen gemakkelijk verwarren regelmatig naast elkaar te presenteren aan de hand van concrete opgaven. Mijn ervaringen geven de indruk: als je dit van het begin af aan doet, telkens op basis van inzicht, en het regelmatig weer doet, dan heb je hiermee succes, je krijgt vrijwel geen vragen 'Mag dat?' en er worden minder fouten gemaakt.

2 Gangbare behandelingen van rekeneigenschappen

Ik zal me in deze en de volgende paragraaf beperken tot de distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen en aftrekken. Sommige andere rekeneigenschappen (bijvoorbeeld i.v.m. tegengestelde nemen en met machtsverheffen) kunnen op vergelijkbare wijze behandeld worden.
Vaak zie je in schoolboeken een behandeling van één der rekeneigenschappen ongeveer volgens het model:
- voorbeelden geven (en eventueel non-voorbeelden);
- formaliseren m.b.v. variabelen;
- toepassen en integreren met samenhangende leerstof.

Voorbeeld: Moderne Wiskunde (derde druk):
a Deel 1 bldz. 96:

'$3p$ betekent de som van 3 termen p.
$2p$ betekent de som van 2 termen p.
Wat betekent nu $3p + 2p$?
Dat is de som van 3 termen p plus de som van 2 termen p dus $3p + 2p = p + p + p + p + p = 5p$'
Er volgt een oefenopgave:
'$3a + 5a = \ldots, \ldots, 9y - 6y = \ldots$'

Ik ben bang dat leerlingen ondanks de toelichting geneigd zijn dit te lezen als een les in het verbuigen van telwoorden, zoiets als:

$3 + 2 = 5$ 1e naamval
$3a + 2a = 5a$ 2e naamval.

Door de vermenigvuldigingstekens weg te laten wordt – dunkt me – een dergelijke neiging nog versterkt. Latere fouten als: '$3a \cdot 2a = 6a$' worden zó in de hand gewerkt.

b Deel 1 bldz. 148-152:
Hier wordt gedemonstreerd dat je op 2 manieren $2x + 2y$ kunt berekenen voor $x = 3$ en $y = 5$. Dan een oefening met vergelijkbare berekeningen. Vervolgens de vraag: 'Gegeven is de tweeterm $20a + 12b$. Kunnen we een getal buiten haakjes brengen?' met verschillende antwoorden (en dan een afspraak over buiten haakjes brengen); tenslotte een 'controle', dat $20a + 12b = 4(5a + 3b)$ door in te vullen $a = 3$ en $b = 8$. Na een oefening hiervoor komt nog de andere kant aan bod: 'haakjes verdrijven'. In rode letters wordt het voorafgaande dan samengevat:

'Voorbeelden van de distributieve eigenschap:
Voor elk getal p, a, b, c geldt:
$p(a + b) = pa + pb \qquad p(a + b + c) = pa + pb + pc$
$p(a - b) = pa - pb \qquad p(a - b + c) = pa - pb + pc.$
De distributieve eigenschap kan in twee richtingen worden toegepast:
1 haakjes verdrijven: $p(a + b) = pa + pb$.
2 buiten haakjes brengen: $pa + pb = p(a + b)$.'

Als afsluiting van de paragraaf worden dan toepassingen genoemd zoals:
'$5 \times 63 = 5(60 + 3) = 5 \times 60 + 5 \times 3 = 300 + 15 = 315$',
'Bereken uit het hoofd 23×99', etc.

In deel II hoofdstuk 8 wordt de distributiviteit uitgebreid tot de operaties in $\mathbb{Q}$. De behandeling is vergelijkbaar met het voorgaande.
Met een behandeling zoals boven geschetst ben ik nooit erg tevreden geweest. Ik ben er ook niet in geslaagd om – na (rijkelijk veel) getallenvoorbeelden – generalisaties tot rekenen met variabelen uit een brugklas te 'trekken', laat staan een formulering van de distributieve eigenschap zoals hierboven vermeld. Ik geloof ook niet, dat door deze inleiding met getallenvoorbeelden echt inzicht t.a.v. distributiviteit gekweekt wordt. Wel leerden mijn leerlingen op korte termijn de bijbehorende opgaven te maken, maar enige tijd later bleken de rekeneigenschappen een bron van hopeloze verwarring te vormen, waarbij mij slechts didactische lapmiddelen ten dienste stonden: overzichten van eigenschappen met toepassingen, een zelden opgevolgd advies 'vul telkens getallen in', etc. Ik voelde hier, dat de leerlingen geforceerd naar generalisatie getrokken werden; er ontstond een breuk tussen het concrete rekenen en het rekenen met variabelen, en zo leerden de leerlingen een onbegrepen vaardigheid op basis van het rode potlood van hun leraar.
De problemen werden zeker gedeeltelijk veroorzaakt doordat op meer dan één plaats tegelijk gegeneraliseerd werd. De tekst in Moderne Wiskunde 1 bldz. 148-152 begint al met 2 variabelen.
Een tweede oorzaak zie ik hierin: de meeste leerlingen rekenen na: $2 \times 3 + 2 \times 5 = 6 + 10 = 16$ en $2 \times (3 + 5) = 2 \times 8 = 16$ (zie Moderne Wiskunde deel 1 bldz. 149) maar overzien zo'n berekening niet en herkennen geen structuren.
Begrip kan wèl sterk gestimuleerd worden door met behulp van *concrete voorbeelden* naar *systeem* te zoeken. De in het begin van dit deel genoemde heuristiek wijst hier een didactische weg.
Het feit dat 7846×32 precies 96 meer is dan 7843×32 begrijp ik uit het feit, dat in de tafel van 32 bij iedere stap er 32 bijkomt (en dat begrijp ik uit de definitie van

vermenigvuldigen in $\mathbb{N}$ als herhaald optellen). Een generalisatie tot:

Voor ieder natuurlijk getal a: $(a + 3) \cdot 32 = a \cdot 32 + 96$

ligt dan voor de hand.

Ik baseer mijn eigen inzicht hier feitelijk op elementaire kennis van de *functie* $x \to x \cdot 32$ (domein $\mathbb{N}$). Die basis kan ook gebruikt worden om leerlingen inzicht te geven.

3 Behandeling van rekeneigenschappen op basis van begrip door systematiseren

Bij de behandeling van rekeneigenschappen in de brugklas ga ik nu uit van tabellen zoals hieronder:

×32	0	1	2	3	4	…	49	50	51	52
	0	32	64	96	128	…	1568	1600	1632	1664
	+32	+32	+32	+32			−32	+32	+32	

Dergelijke tabellen kunnen na enige tijd gemakkelijk door leerlingen (onder begeleiding) gegeneraliseerd worden tot

×32	$a-2$	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$	…	$a+20$
	$32 \cdot a-64$	$32 \cdot a-32$	$32 \cdot a$	$32 \cdot a+32$	$32 \cdot a+64$	…	$32 \cdot a+640$
	−32	−32	+32	+32			
			$+20 \times 32$				

en ook verder tot

×32	$4 \cdot a-1$	$4 \cdot a$	$4 \cdot a+1$	$4 \cdot a+2$	…	$4 \cdot a+15$
	$128 \cdot a-32$	$128 \cdot a$	$128 \cdot a+32$	$128 \cdot a+64$	…	$128 \cdot a+480$
	−32	+32	+32			
		$+15 \times 32$				

Tenslotte komen er ook nog generalisaties zoals:

$32 \cdot (4 \cdot a + b) = 128 \cdot a + 32 \cdot b$, nu dus eindelijk in twee variabelen.

Ook andere generalisaties worden gemaakt:

×p	18	19	20	21	22	…	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$
	$18 \cdot p$	$19 \cdot p$	$20 \cdot p$	$21 \cdot p$	$22 \cdot p$	…	$a \cdot p-p$	$a \cdot p$	$a \cdot p+p$	$a \cdot p+2p$
	$-p$	$-p$	$+p$	$+p$			$-p$	$+p$	$+p$	
	$-2 \cdot p$		$+2 \cdot p$					$+2 \cdot p$		

Zo ontstaat een groei naar formules met verscheidene variabelen door stapsgewijze generalisatie op verschillende plaatsen. Het stramien is simpel: telkens weer een tabel invullen, dan aan de hand van die tabel een invuloefening (zoals: '32(...) = 32 · a − 192') aanvankelijk door uit de gemaakte tabel af te lezen, daarna door in gedachte de tabel uit te breiden. Tenslotte gebruiken de leerlingen de tabel alleen nog maar in gedachte.
Uit gesprekken met leerlingen bleek me dat vrijwel alle leerlingen zo distributiviteit goed konden inzien en echt houvast hadden aan de gedachte aan een tabel. Moeilijk vonden ze het niet en er werd met plezier aan gewerkt.
Naast de distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen en aftrekken, en tevens in contrast hiermee, heb ik o.a. ook de associativiteit van vermenigvuldigen behandeld met behulp van tabellen. Dat gebeurde met zulke tabellen:

×3

49	50	51	52
147	150	153	156

−3 +3 +3

×32

4704	4800	4896	4992

−3·32 +3·32 +3·32

In de onderste rij komt er bij iedere stap naar rechts telkens 96 bij. Zou je zo de tabel voor vermenigvuldigen met 96 hebben gekregen? Mijn leerlingen kwamen zelf met het idee, dat je slechts op één plaats moet controleren (door de vermenigvuldiging met 96 uit te voeren): als het daar klopt, is het elders vanzelf in orde. Blijkbaar wordt hier door de leerlingen zoiets als volledige inductie toegepast op een heel natuurlijke wijze, en dat geeft me het vertrouwen dat hier op een gezonde wijze wiskunde wordt bedreven. Ik heb niet over volledige inductie met mijn leerlingen gepraat, dat lijkt me veel te vroeg om te doen, maar de gedachte hieraan gaf wel richting bij mijn begeleiding van de leerlingen.
Toen ik de associativiteit voor het eerst zo behandelde had ik een leuke ervaring: ik hoorde een leerling hardop mijmeren: 'Hé, dat is grappig, het (eerst vermenigvuldigen met 3 en dan met 32) is dus maal 96; je zou toch denken dat het maal 35 was!' Blijkbaar was de redenering overtuigend voor hem, maar tevens het resultaat verrassend. Bij peilingen in allerlei brugklassen heb ik inderdaad gezien, dat doorgaans het merendeel van de leerlingen denkt, dat bijvoorbeeld eerst vermenigvuldigen met 3 en dan met 32, vermenigvuldigen met 35 oplevert.

Voordat leerlingen kunnen gaan redeneren aan de hand van zulke tabellen moet er natuurlijk wel iets gedaan worden, zoals het rekenen met variabelen (om bijvoorbeeld niet in de verleiding te komen om te denken, dat voor ieder getal a geldt: $32 \cdot a + 32 = 64 \cdot a$ (zie het volgende artikel: 'Variabelen en formules in de brugklas; generaliseren')) en puzzels zoals:

1 Hier staat een stuk van een vermenigvuldigingstabel met bovenaan de natuurlijke getallen (in de gewone volgorde).

Vul in:

...	...	...	...	...
624	...	...	...	672

2 Welke van de volgende tabellen kunnen stukken van vermenigvuldigingstabellen zijn (met bovenaan de natuurlijke getallen in normale volgorde)?

...	...	...
732	740	748

...	...	...	...
0	12	24	30

...	...	...	...
24426	24472	24518	24564

Tabellen kunnen ook met vrucht gebruikt worden bijvoorbeeld bij uitbreiding van de vermenigvuldigingsoperatie vanuit $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^+$ en $\mathbb{Q}$ op basis van 'behoud van structuur' en kunnen dan verder weer dienen bij het vormen van inzicht dat de reeds bekende rekeneigenschappen ook daarnaar uitgebreid kunnen worden.
Ter illustratie geef ik hier een schets van uitbreiding van de vermenigvuldiging vanuit $\mathbb{N}$ tot $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Ik doe dat in het kort en niet in taal bestemd voor leerlingen:

$\times\frac{7}{4}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\frac{7}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{21}{4}$	$\frac{28}{4}$	$\frac{35}{4}$	$\frac{42}{4}$	$\frac{49}{4}$	$\frac{56}{4}$

$+\frac{7}{4}$ $+\frac{7}{4}$ $+\frac{7}{4}$

Eerst wordt inductief voor ieder natuurlijk getal n bijvoorbeeld gedefinieerd $n \cdot \frac{7}{4}$, ondersteund door de tabel. Gebroken getallen vermenigvuldigen met natuurlijke getallen is hiermee simpel gedefinieerd, en delen door natuurlijke getallen levert zo in wezen ook geen problemen. Dit gaan we nu uitbreiden door de tabel te verfijnen:

$\times\frac{7}{4}$

...	5	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$	6	$6\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	7	$7\frac{1}{3}$	...
	$\frac{35}{4}$	...	...	$\frac{42}{4}$	...	...	$\frac{49}{4}$	...	

Bovenaan is de groei bij iedere stap telkens $\frac{1}{3}$.

Onderaan is de groei per 3 stappen $\frac{7}{4}$. Om de oude regelmaat voort te zetten kiezen we als groei per stap: $\frac{7}{4} : 3 = \frac{21}{12} : 3 = \frac{7}{12}$.

Zo definiëren we: $5\frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{4} + \frac{7}{12} = \frac{112}{12}$.

Als je de tabel verder gaat verfijnen door bijvoorbeeld bovenaan als groei per stap $\frac{1}{6}$ te kiezen, dan groeit volgens een analoge definitie het beeld telkens met het 6e

deel van $\frac{7}{4}$, dus met $\frac{7}{24}$. Dat levert geen conflicten met de eerste afspraak: 2 stappen van $\frac{7}{24}$ optellen levert $\frac{7}{12}$ optellen.
Het algemene inzicht dat je zo een (conflict-vrije) definitie van vermenigvuldigen in $\mathbb{Q}^+$ krijgt, kun je baseren op dergelijke verfijningen en de eigenschap

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall q \in \mathbb{Q}^+ : n \cdot (m \cdot q) = (n \cdot m) \cdot q$$

Deze eigenschap is gemakkelijk in te zien analoog aan het voorgaande (zie: vermenigvuldigen met 3 en daarna met 32 is vermenigvuldigen met 96). Ik ben overigens in mijn lessen tevreden met een aanzet tot dit inzicht door concrete voorbeelden, zoals hier genoemd.
Systematiseren aan de hand van tabellen leidt tenslotte tot formules als:

voor ieder natuurlijk getal p: $\frac{p}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{p \cdot 7}{12}$

en daar zien de leerlingen dan een hun reeds lang bekend algoritme voor het vermenigvuldigen van gebroken getallen. De regelmaat van de nieuw gemaakte tabellen garandeert dat de vroegere redeneringen, bijvoorbeeld in het kader van distributiviteit, opnieuw toegepast kunnen worden.
Naast tabellen voor vermenigvuldigen zijn met name tabellen voor tegengestelde en voor machtsverheffen-met-vast-grondtal nuttige hulpmiddelen voor het behandelen van allerlei rekeneigenschappen.

4 Keuze en gebruik van didactische hulpmiddelen bij de behandeling van rekeneigenschappen

De boven geschetste behandeling van rekeneigenschappen heeft o.a. tot doel: leerlingen een ondergrond te geven op basis waarvan ze begrijpend kunnen handelen en waarop ieder (met of zonder hulp van de leraar) kan terug vallen, wanneer hij/zij in onzekerheid is.
De theorie van Galperin [1, 2, 4, 5] geeft aan hoe je leerprocessen hierop kunt richten.
Dergelijke leerprocessen zijn opgebouwd uit 3 fasen: de materiële, de verbale en de mentale fase. In de eerste fase leren de leerlingen een handeling 'materieel' uitvoeren. In dit geval wordt in deze fase gewerkt met echt opgeschreven tabellen. Volgens het onderzoek van Galperin zijn de resultaten van het totale leerproces sterk afhankelijk van de kwaliteit van de materiële fase. Het lijkt dan ook niet overbodig om de leerlingen aanvankelijk intensief te laten werken met uitgeschreven tabellen; zij kunnen hiermee goed vertrouwd worden gemaakt door variaties in de probleemstelling. Het is verleidelijk om verkortingen te stimuleren, bijvoorbeeld zó:

	124	125	126	127	128
× 35	4340				?

'... 4 stappen naar rechts, dus $128 \times 35 = 4340 + 4 \times 35$ ...'
Het is echter veel beter wanneer niet de leraar zo'n verkorting aangeeft, maar deze door elke leerling zelf gevonden wordt. Als de leerling blijk geeft van begrip bij die verkorting, kan ze toegestaan worden.
Door telkens bij een opgeschreven tabel ook vragen te stellen die corresponderen met niet-opgeschreven delen van die tabel wordt de overgang naar de verbale fase en naar generalisatie ingeleid.
Pas wanneer de leerlingen gemakkelijk werken met opgeschreven tabellen, zelf met begrip verkortingen hebben aangebracht, niet opzien tegen uitstapjes naar niet-opgeschreven delen van tabellen en ook kunnen werken met gegeneraliseerde tabellen, (met één of meerdere variabelen er in) kun je het opschrijven van tabellen achterwege laten en er nog slechts in woorden naar verwijzen.
Die materiële fase kost geen weken maar wel verscheidene lessen bij de eerste introductie van dit thema. Later, bij uitbreiding van het getalsysteem, moet het gehele proces weer in het kort doorlopen worden, maar dat gaat dan vrij snel.
Naar mijn ervaring is zo inderdaad te bereiken dat leerlingen hieraan echt houvast hebben. Als ze dan op een later tijdstip eens ontsporen, dan kun je als leraar hen weer op het spoor helpen door even terug te verwijzen: 'Denk 'ns aan een vermenigvuldigingstabel! Welke vermenigvuldigingsfactor zou je hier nemen?... Welke regelmaat zit er in die tabel?... Op welke plaatsen in de tabel zou je kijken? ...'.
Vermenigvuldigingstabellen dienen hier dus als een standaard referentie voor de distributiviteit van vermenigvuldigen over optellen en aftrekken, en (in mindere mate) voor de associativiteit van vermenigvuldigen. In het verleden heb ik ook andere mogelijkheden daartoe beproefd, bijvoorbeeld konkretiseringen zoals:

'In iedere doos zitten 32 rekenmachines, dus
in 5 dozen zitten ... rekenmachines
in a dozen zitten ... rekenmachines
in $a + 5$ dozen zitten ... rekenmachines ...'

en

'In iedere doos zitten 35 pakjes;
in a dozen zitten ... pakjes;
in elk pakje zitten 3 repen chocolade, dus
in iedere doos zitten ... repen chocolade,
in a dozen zitten ... repen chocolade, ...' enz.

Mijn leerlingen konden dergelijke opgaven best maken, mede dank zij het gebruik van boomdiagrammen, maar terugverwijzen hiernaar bij rekenopgaven leverde weinig succes op. Eigenlijk niet zo verwonderlijk: een formule eerst interpreteren in termen van dozen, etc., daarmee dan redeneren, eventueel via een boomdiagram, en het resultaat vervolgens terug interpreteren is nogal omslachtig en lastig. Daardoor is zoiets als het bovenstaande m.i. ongeschikt als standaard referentie.

Een standaard referentie voor een routine-handeling moet m.i. aan twee eisen voldoen:

1 Ze moet goed te hanteren zijn voor de *gebruiker*:
  a door de gebruiker gemakkelijk op te bouwen; dus ook voldoende abstract, opdat de gebruiker niet afgeleid wordt door overbodige details
  b door de gebruiker gemakkelijk te overzien en te begrijpen; dus ook voldoende concreet, en zo mogelijk ook gemakkelijk te materialiseren (op papier doorgaans).
2 Ze moet *voor veel situaties* bruikbaar zijn:
  a eenvoudig te generaliseren (in dit geval: op alle plaatsen kun je gemakkelijk overgaan van concrete getallen naar variabelen)
  b eenvoudig aan te passen bij uitbreiding van de stof (in dit geval met name: uitbreiding van het getallensysteem vanuit $\mathbb{N}$).

Het is duidelijk dat in de brugklas deze criteria tot een andere keuze van een standaard referentie kunnen leiden dan elders. Zo heeft het gebruik in de brugklas van boomdiagrammen als standaard referentie nadelen bij uitbreidingen naar $\mathbb{Z}$ en naar $\mathbb{Q}$.
Het gebruik van rekenwetten in de brugklas als standaard referentie ('Voor alle getallen a, b, c uit ... : $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$', etc.) is m.i. ongunstig in de zin van punt 1b. Baseren op rekenvoorbeelden ('$32 \times 5 = 30 \times 5 + 2 \times 5$', etc.) is zwak in de zin van punt 2a en wellicht ook t.a.v. punt 1b (dit laatste is afhankelijk van de kwaliteit van het voorafgaande rekenonderwijs). De keuze van vermenigvuldigingstabellen als standaard referentie in de brugklas lijkt op alle punten vrij gunstig te zijn. Mijn ervaring was ook dat het werken ermee goed aansloeg.
Daarmee wil ik niet beweren, dat de andere genoemde zaken maar beter achterwege kunnen blijven in de les. Integendeel; met name zou ik willen pleiten voor opgaven over konkrete zaken, liefst wat meer aangekleed en konkreet dan de bovenvermelde opgaven over dozen. Op dit punt wil ik graag terugkomen in het volgende artikel:
'Variabelen en formules in de brugklas: generaliseren'.

Literatuur

1 P. Ya. Galperin: *An experimental study in the formation of mental actions*. (Psychology in the Soviet Union. Ed.: B. Simon (transl.), London 1957).
2 P. Ya. Galperin, N. F. Talyzina: *Formation of elementary geometrical concepts and their dependence on directed participation by the pupils*. (O'Connor: Recent Soviet Psychology).
3 B. N. P. Kamerich: Problemen oplossen in de brugklas. (Euclides **59**, 5, p. 245).
4 J. M. C. Nelissen: *De theorie van Gal'perin in discussie* (Pedagogische Studiën 57 (1980) nr. 7/8).
5 C. F. van Parreren, J. A. M. Carpay: *Sovjet psychologen aan het woord* (Groningen 1972).

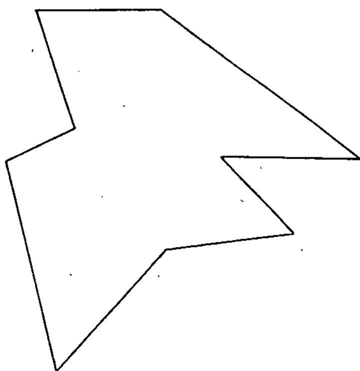
Wat bepaalt ons handelen?

HARRIE BROEKMAN

Datgene waarmee we op een zeker moment bezig zijn beïnvloedt – soms meer dan we beseffen – de aanpak die we kiezen bij het oplossen van problemen. In een aantal gevallen lijkt het wel of we gedwongen worden om een opgave op een bepaalde manier te maken. En dat terwijl we vaak andere, soms zelfs betere of efficiëntere methoden ter beschikking hebben.
Via een aantal korte voorbeelden zal ik aangeven wat ik met een door de omstandigheden bepaalde – 'afgedwongen' – aanpak bedoel. Daarna zal ik in dat kader uitvoerig ingaan op 'de afstand van een punt tot een lijn'.

Voorbeeld 1
Tussen een aantal opgaven over getallenrijtjes stonden ook opgaven van de soort: de som van drie opvolgende gehele getallen is 24. Welke zijn die getallen? Enkele leerlingen losten deze opgave op door 'proberen', maar de meerderheid door te stellen $x + (x + 1) + (x + 2) = 24$.
Bij de opgave: de som van 25 opvolgende gehele getallen is 1000, schreven vrijwel alle leerlingen mopperend op $x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots$ etc.
Vraag: zouden ze dat ook doen bij een som 0?

Voorbeeld 2
De ene helft van een groep a.s. leraren legde ik deze opgave voor:
'teken een tweemaal zo grote figuur'



De andere helft van de studenten kreeg de volgende opgave:

'teken een tweemaal zo grote figuur'

Alle studenten die de tweede opgave kregen telden hokjes. De eerste opgave werd op wel vier verschillende manieren aangepakt, waarbij gebruik gemaakt werd van allerlei eigenschappen van het puntvermenigvuldigen.

Opmerking: één student, die de tweede opgave moest maken, vermenigvuldigde de oppervlakte met 2. De rest vond het vanzelfsprekend dat de lengte van de zijden met 2 vermenigvuldigd moest worden.

Voorbeeld 3

De leerlingen van een 4 havo klas hebben een aantal opgaven gemaakt van het type: l en m zijn gegeven door een vectorvoorstelling. Bereken het snijpunt van l en m.

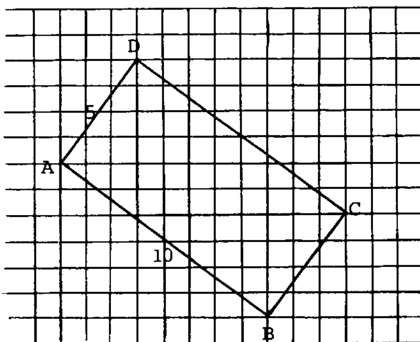
Een volgende opgave luidt:

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de lijn m:

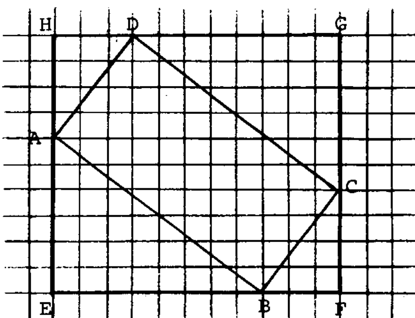
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ met de x-as en de y-as

Diverse leerlingen stellen eerst een vectorvoorstelling van de x-as en de y-as op.

Voorbeeld 4
Bereken de oppervlakte van vierhoek *ABCD*.



Diverse leerlingen tekenden om *ABCD* een rechthoek en zeiden toen dat ze er niet uit kwamen.



De afstand van een punt tot een lijn

De vraag 'wat is de afstand van *P* tot *l*' wordt – afhankelijk van de omstandigheden – verschillend beantwoord.

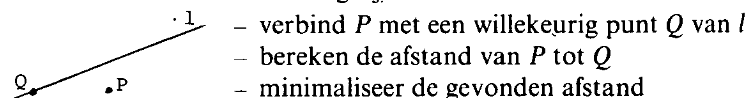
1 In veel gevallen is een goede schatting zeker verantwoord, en in de praktijk van alle dag zullen we daar vaak genoegen mee nemen.
  In de wiskundeles ligt dat anders, en dat is niet alleen jammer voor het lbo. Ligt immers het 'een idee hebben van' niet ten grondslag aan het 'weten'?
2 Gewoon tekenen en meten met de geodriehoek (of tellen van hokjes) hebben we ook verbannen door te schrijven 'bereken'.
3 Laten zien dat de gevraagde afstand gelijk is aan een reeds berekende afstand valt sinds 1968 eveneens buiten het bestek van de wiskundeles.

Hoe pakken we het dan aan?

Meestal door gebruik te maken van het feit dat de afstand het '*loodrechte*' verbindingslijnstuk is. En loodrecht kan zo fijn met het inprodukt of met rico's en als je nog even doorgaat maak je toch gewoon een formule!?

De afstand als '*kortste*' verbindingslijnstuk komen we weinig tegen vanwege de rekenproblemen. Maar ook andere – meer meetkundige – methoden zijn ongebruikelijk geworden sinds we gebukt gaan onder de druk van de vectoren.
Het is jammer dat we daardoor de leerlingen de kans ontnemen om eens op een andere manier tegen een vraag aan te kijken en vooral zelf te leren kiezen voor een oplossingsmethode.
En dat er flink gekozen kan worden blijkt wel uit de volgende (zeker onvolledige) lijst mogelijkheden:

4 Door het *kortste* verbindingslijnstuk te berekenen.



– verbind P met een willekeurig punt Q van l
– bereken de afstand van P tot Q
– minimaliseer de gevonden afstand

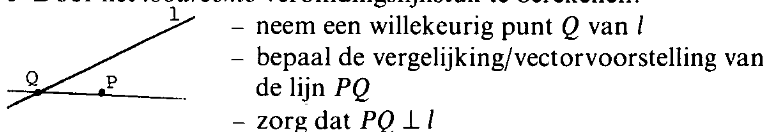
a Voor l met vergelijking $y = 2x + 3$ en $P(5, 1)$ betekent dit het minimaliseren van $\sqrt{(x - 5)^2 + (2x + 2)^2}$, dus van $5x^2 - 2x + 29$.

b Voor l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $P(5, 1)$ betekent dit het minimaliseren van $\sqrt{(\lambda - 5)^2 + (2\lambda + 2)^2}$, dus van $5\lambda^2 - 2\lambda + 29$.

Opmerking

Waarom dit moeilijkheden oplevert? Niet alleen het rekenwerk bij het minimaliseren (kwadraatafsplitsen, of differentiëren) is daaraan schuldig, maar ook het feit dat we meestal het loodrechte gebruiken én het feit dat kortste in het dagelijks leven vaak iets anders betekent. (Veel afstanden worden in het dagelijks leven aangegeven door de benodigde reistijd te noemen.)

5 Door het *loodrechte* verbindingslijnstuk te berekenen.



– neem een willekeurig punt Q van l
– bepaal de vergelijking/vectorvoorstelling van de lijn PQ
– zorg dat $PQ \perp l$

a Voor l met vergelijking $2x - y + 3 = 0$ en $P(5, 1)$ en betekent dit het bepalen van de vergelijking van de lijn m door $Q(a, 2a + 3)$. Dit levert $y - 1 = \dfrac{2a + 2}{a - 5}(x - 5)$.
Vervolgens stellen we het produkt van de rico's gelijk aan -1, berekenen a, substitueren dit in $(a, 2a + 3)$ en berekenen de afstand van P en Q.

b Voor l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $P(5, 1)$ betekent dit het bepalen van de vectorvoorstelling van de lijn m door $P(5, 1)$ en $Q(\lambda, 3 + 2\lambda)$.
Dit levert $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \lambda - 5 \\ 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$.
Vervolgens stellen we inprodukt van de richtingsvectoren van l en m gelijk

aan 0, berekenen λ, substitueren dit in $(\lambda, 3 + 2\lambda)$ en berekenen de afstand van P tot Q.

Opmerking

De grote moeilijkheid bij deze methode is het feit dat we de leerlingen niet of nauwelijks geleerd hebben een 'willekeurig punt' te nemen*, evenals het feit dat we vrijwel niet hebben laten werken aan het opstellen van een vergelijking of vectorvoorstelling. Jammer??

6 Door het *loodrechte* verbindingslijnstuk te berekenen.
- bepaal de lijn m door P loodrecht op l
- bereken het snijpunt S van l en m
- bereken de afstand van P en S

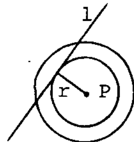
a Voor l met vergelijking $2x - y + 3 = 0$ en $P(5, 1)$ betekent dit het berekenen van het snijpunt van de lijn l en de lijn m met vergelijking $x + 2y - 7 = 0$. Etc., etc.

b Voor l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $P(5, 1)$ betekent dit het berekenen van het snijpunt van de lijn l met de lijn m met vectorvoorstelling: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Etc., etc.

c $l: 2x - y + 3 = 0$ en $P(5, 1)$. Via normaalvector.
$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
Substitutie van $5 + 2\lambda$ en $1 - \lambda$ voor x resp. y levert het snijpunt van l en m. Etc., etc.

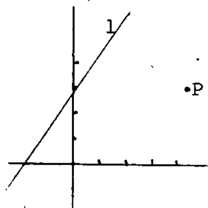
7 Door het *loodrechte* verbindingslijnstuk te berekenen via een meetkundige omweg.

Geval 1 P is de oorsprong
Bereken de straal van de cirkel om P die raakt aan de lijn l.



Voor l met vergelijking $y = 2x + 3$ en $P(0, 0)$ betekent dit het substitueren van $y = 2x + 3$ in $x^2 + y^2 = r^2$ en de discriminant van de vergelijking in x gelijk aan nul stellen.

Geval 2 P is niet de oorsprong, bv. $P(5, 1)$
Pas een coördinatentransformatie toe waardoor een nieuw assenstelsel ontstaat met $(5, 1)$ als oorsprong en assen parallel aan de oorspronkelijke assen.



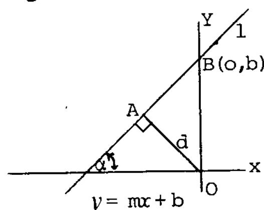
* Zie bv. de problemen met examen Havo 1981 II opg. 1^b.

Voor l met vergelijking $y = 2x + 3$ en $P(5, 1)$ betekent dit dat we krijgen $y' + 1 = 2(x' + 5) + 3$, dus $y' = 2x' + 12$. Daarna verder volgens geval 1.

Opmerking

De moeilijkheid zit hier vermoedelijk in het 'op het idee komen' en in de coördinatentransformatie. Dit laatste zal binnen onze leerstofkeuze ondervangen kunnen worden door de cirkel $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ te nemen. Maar ook dat vereist het zelf kunnen opstellen van een vergelijking.

8 Het *loodrechte* verbindingslijnstuk berekenen m.b.v. trigonometrie.
Geval 1 P is de oorsprong (anders eerst coördinaten-transformatie toepassen) en de lijn l heeft een positieve rico.

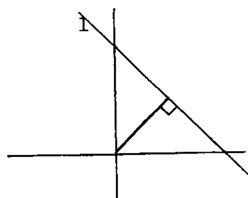


$\angle AOB = \alpha$

In $\triangle AOB$ geldt: $\cos\alpha = \dfrac{d}{b}$ dus $\cos^2\alpha = \dfrac{d^2}{b^2}$

$$d^2 = b^2 \cdot \cos^2\alpha = \frac{b^2}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{b^2}{1 + m^2} \text{ en } d = \frac{|b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Geval 2 P is de oorsprong (anders eerst coördinaten-transformatie toepassen) en de lijn l heeft een negatieve rico.

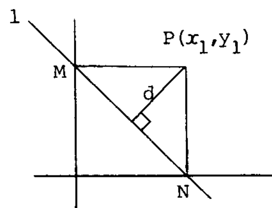


De berekening gaat niet essentieel anders.

9 Het *loodrechte* verbindingslijnstuk berekenen door gebruik te maken van een oppervlakte formule.
De oppervlakte van $\triangle P_1P_2P_3$ is de absolute waarde van

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ waarin x_i en y_i de coördinaten van P_i zijn.

$P(x_1, y_1)$
$l: ax + by + c = 0$ (met $a \neq 0$ en $b \neq 0$)
Bereken de oppervlakte van $\triangle MNP$ via bovenstaande formule en stel dit gelijk aan $\frac{1}{2} \times d \times MN$. Etc., etc.



10 De afstand van een punt tot een lijn berekenen door substitutie in formules die het rekenen via een van de vorige methodes heeft opgeleverd.

Dat is meestal de formule $d(P, l) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ voor $P(x_0, y_0)$ en l de lijn met vergelijking $ax + by + c = 0$.

Mogelijk is uiteraard ook de formule $d(P, l) = \dfrac{|b|}{\sqrt{1 + m^2}}$ bij $P = O(0, 0)$ en $y = mx + b$.

Opmerking

Een veel voorkomend probleem hierbij is uiteraard het eventuele omrekenen van vectorvoorstelling in vergelijking.

Tot slot

De struktuur waarin we werken bepaalt vaak – m.i. *te* vaak – de manier waarop we bepaalde problemen aanpakken of door de leerlingen laten aanpakken.
Toegespitst op 'de afstand van een punt tot lijn' betekent het voorgaande dat door de behandeling van dit onderwerp in het hoofdstuk over vectoren veel leerlingen vanaf dat moment alleen nog rekenen met het inprodukt. Op het moment dat daar dan een formule aan toegevoegd wordt (bij lijn gegeven door vergelijking) lijkt het hek van de dam!
Veel leerlingen hebben vanaf dat moment de neiging vrijwel blindelings een van beide methodes te gebruiken, hetgeen uiteraard gestimuleerd wordt door de uitbreiding naar $\mathbf{R}_3$.
Het is zinvoller een gesprek te voeren over allerlei verschillende mogelijkheden en hun achtergronden (uiteraard op de momenten dat de leerlingen daar aan toe zijn), zodat er bewust gekozen kan worden. Daarbij hoort de leerling ook te weten of zijn keuze veel vertaalwerk vraagt – van vectorvoorstelling naar vergelijking, of omgekeerd – én veel rekenwerk.

Schijn bedriegt!

ANNE VAN STREUN

Het commentaar van collega P. de Roest op het eerste 'Wiskunde-A'-eindexamen (Euclides, 59e jaargang, nr. 3, november 1983) lokt bij mij twee reacties uit, die ik onder de noemer 'Schijn bedriegt' kan onderbrengen. Reacties, die sterk bepaald worden door mijn ervaringen in 4 v.w.o. met het project 'Heuristisch wiskunde-onderwijs'. Daarin zijn wij op zoek naar wiskunde-onderwijs, waarin de leerlingen leren hun wiskundig gereedschap ook te gebruiken bij niet-standaard probleemsituaties binnen de wiskunde en daar buiten. Wil je inderdaad wiskunde leren toepassen (in natuurkundige, economische, chemische, biologische of sociaal-wetenschappelijke situaties), dan kun je je als ervaren wiskundedocent (zoals collega de Roest er één is) lelijk vergissen met de inschatting van de moeilijkheidsgraad van dergelijke toepassingen.

Schijn bedriegt

Gegeven een klas vol leerlingen die vlot de wiskunde-opgaven maken b.v. over eerstegraadsfuncties of over de afgeleide functies van veeltermfuncties of over de bepaling van maxima/minima van veeltermfuncties of over exponentiële functies en noem maar op. Legt u ze nu maar eens dezelfde opgave voor, maar nu beschreven in een toegepaste context.* Dezelfde opgave? Ja, voor ons, ervaren wiskundedocenten, die door het verhaal heen de wiskundige essentie en overeenkomst zien. Iedere docent, die in het agrarisch, economisch, technisch of universitair onderwijs leerlingen en studenten probeert te leren hun wiskundige kennis toe te passen, kan u vertellen dat die weg van (binnen wiskunde) geleerde begrippen en technieken naar het toepassen van wiskunde vaak volkomen geblokkeerd lijkt. En natuurlijk ken je als docent op een havo-vwo school de algemene klacht van de collega's natuurwetenschappen/economie, dat de grote massa van onze leerlingen zo weinig kan met de bij ons in de wiskundelessen geleerde wiskunde. Inderdaad, schijn bedriegt. Succes op het wiskunde-proefwerk en het wiskunde-examen zegt nog niets over de waarde van het geleerde buiten de wiskundelessen. *Schijn bedriegt.* Als het toepassen van wiskunde, nadat de wiskundige begrippen en technieken binnen een wiskundige

* Legt u opgave 1 van het examen maar eens voor aan uw klas 2-vwo of 3-havo, zoals collega de Roest suggereert. In het arikel '*De herkenning van wiskundige essenties in realistische probleemsituaties*' (De Nieuwe Wiskrant, mei 1983) vindt u meer voorbeelden van het 'vertaalprobleem'.

vraagstelling zijn geleerd, zo moeizaam verloopt, waarom dan niet geprobeerd om vanaf *de eerste ontwikkeling van een begrip* (b.v. afgeleide) realistische situaties te verbinden aan wiskundige noties? Dat probeert het HEWET-team in de leerstofpakketjes voor wiskunde-A. Uit die verschillende situaties moet dan het wiskundige begrip of de wiskundige methode worden geabstraheerd. Een tijdrovend proces, dat veel overeenkomsten vertoont met de historische ontwikkeling van een begrip. Kijk je als ervaren wiskundedocent(e) voor het eerst naar zo'n leerstofpakketje (b.v. 'Matrices'), dan ben je snel geneigd om 'even' de kale wiskundige inhoud (de 'essentie') er uit te lichten. Is dat alles? Schijn bedriegt. Het ontwikkelen van wiskundige begrippen en methoden in samenhang met realistische situaties kost inderdaad veel meer tijd dan het leren van wiskundige technieken voor wiskundige standaard-opgaven.

De moeite waard!
Uiteindelijk is de keuze voor een meer op toepassen gericht wiskunde-onderwijs *een keuze voor een bepaalde doelstelling*. Wiskunde, een centraal vak, *omdat* het op allerlei wetenschappelijke en maatschappelijke terreinen wordt gebruikt. 'Wiskunde-A' is een eerste poging om iets van *die* doelstelling te realiseren. Een *eerste* poging, want wie durft b.v. te stellen dat een B-leerling(e) (met wiskunde B) geen belang heeft bij wiskunde, die zij/hij kan herkennen in de natuurwetenschappen? En wat te denken van de havo-leerlingen? Enz., enz.
Maar de pretentie alleen is niet genoeg. Een beoordeling of veroordeling van HEWET-materiaal of van een HEWET-examen is maar een begin. Het is – denk ik – nog een lange weg om een uitgekiende didaktiek te ontwikkelen, die er toe leidt dat wij tussen de klippen door kunnen zeilen. De klip van de kist goed gevuld met wiskundig gereedschap, dat niemand kan gebruiken. En de klip van de al te schamel gevulde gereedschapskist, waar maar erg weinig situaties mee aangepakt kunnen worden.
Collega de Roest verwijst naar de schoenmakersleest, waar ook wiskundeleraren zich bij moeten houden. De problematiek van 'Wiskunde A' of liever van de 'toegepaste wiskunde' of van het 'maken van modellen' heeft inderdaad te maken met het product, dat wij in het wiskunde-onderwijs willen afleveren.
Willen wij beter passend, beter bruikbaar, schoeisel afleveren, dan zullen wij ons moeten verdiepen in de wensen en problemen van de afnemers. En onze gereedschapskist aanvullen met door die gebruikers geïnspireerd gereedschap. Wat toegepast wiskundigen natuurlijk al sinds jaar en dag doen. En waar wij – meest 'zuiver' opgeleide wiskundedocenten – ook nieuwe inspiratie aan kunnen ontlenen.

Een reactie

HARRY OOSTIJEN, BEN SCHOLTEN, RINKE VAN DER VALLE

Om te beginnen lijkt het ons goed ons even voor te stellen. Wij zijn drie wiskundeleraren van de christelijke scholengemeenschap 'De Waezenburg' uit Leek. Onze school is één van de tien scholen die dit jaar in 5-atheneum gestart zijn met wiskunde-A.

Wij hebben dan ook met belangstelling kennis genomen van het artikel van Pieter de Roest in het novembernummer (1983) van Euclides over het eerste wiskunde A examen. Dit examen is in mei 1983 afgenomen en gold alleen voor de twee scholen die in 1981 gestart zijn met wiskunde A in de vijfde klas.

Uit zijn artikel blijkt dat hij zich zorgen maakt over het niveau van dit examen. Voorts zet hij vraagtekens bij de haalbaarheid van het toetsen van wiskunde die in een context is verpakt. Ook voor ons is het toetsen van de wiskunde A stof inderdaad een zaak die veel aandacht en tijd vergt. Er zal op dit terrein nog veel ervaring opgedaan moeten worden in de lopende experimenten. Over het niveau van dit eerste examen valt o.i. op dit moment nog niet veel te zeggen. Als wij de stof van de vijfde en zesde klas doorgewerkt en het schoolonderzoek afgerond hebben dan kunnen wij misschien een voorzichtig oordeel geven.

Toch meent Pieter de Roest nu al conclusies te kunnen trekken. Het examen is uitgezonderd vraag 4 en 5 veel te eenvoudig, stelt hij. Over vraag 5b merkt hij op: 'Op de havo is dit moeilijk, leerlingen die moeite met Wiskunde-I hebben, krijgen hier ook problemen'. Dit snappen we niet helemaal: som 1, 2, 3 veel te eenvoudig, dan komen er eindelijk wat moeilijker sommen en dan is het ook niet goed. 'Geen nood, we stellen dan een HEWAB-commissie in'. Op deze zin lijkt een reactie overbodig.

Verder merkt Pieter de Roest op dat wiskunde bedrijven met problemen uit de werkelijkheid mooi is, in ieder geval mooi klinkt. En dat die werkelijkheid voor het HEWET-team blijkbaar alleen biologie en economie is. Misschien heeft hij som 1 (grafische verwerking n.a.v. een grafiek uit 'Der Spiegel') en som 4 (kansberekening in de context van een test die kandidaat-kosmonauten moeten ondergaan) over het hoofd gezien? En deze opmerking klopt natuurlijk helemaal niet als je de boekjes doorkijkt die voor de vijfde en zesde klas geschreven zijn en waarin behalve problemen uit de biologie en economie ook een groot aantal zaken aan de orde komen die ontleend zijn aan vakken als aardrijkskunde, natuurkunde en scheikunde.

Aan het slot van zijn artikel komt de aap uit de mouw! Pieter de Roest wil graag

terug naar de schoenmakersleest waar ook wiskundeleraren zich bij zouden moeten houden. Het is uiteraard zijn goed recht bovenstaande mening te hebben. Ons inziens gaat hij echter over de schreef, als hij op grond van het eerste Wiskunde A examen het gehele HEWET-experiment be- en veroordeelt.
Toen we de eerste twee zinnen lazen van zijn artikel: 'Voor me ligt het eerste examen vwo wiskunde A. Eindelijk iets concreets van de HEWET.', dachten we: Zou hij niet weten dat je al het leerlingenmateriaal gewoon kan bestellen? En dat je in de Nieuwe Wiskrant voortdurend artikelen aantreft over de klassepraktijk? In plaats van deze vragen te stellen is het misschien nog beter om iedereen die informatie wenst, uit te nodigen op 'De Waezenburg' in Leek.

Naschrift
Waarschijnlijk denkt u net als dhr. Van Streun dat ik een 'zuiver'-wiskundige ben. Dat ben ik niet, misschien is het juist daarom dat ik zoveel moeite met dit 'experiment' heb, om leerlingen zo te leren mathematiseren. Ik ben namelijk ook geen bioloog, en geen geoloog, en geen econoom, en geen chemicus, en geen geograaf, en geen socioloog, en geen . . . .
Ik moet in augustus wel in het duister springen: HELP!

Pieter de Roest

Naschrift redactie
Voor alle duidelijkheid wil de redactie van Euclides haar waardering uitspreken voor de aanpak en het materiaal van het HEWET-team. We betreuren het dat het plaatsen van het artikel van Pieter de Roest door sommigen anders geïnterpreteerd is. De Hewet-innovatie is in meerdere opzichten uniek en belangrijk, niet alleen voor de bovenbouw van het vwo maar voor het gehele wiskundeonderwijs. Uit het artikel van De Roest en met name uit zijn naschrift hierboven blijkt wél iets van de problemen die het wiskundeonderwijs nog te wachten staan als het nieuwe leerplan en de nieuwe eindexamens echt op grote schaal ingevoerd worden. Contextrijk en probleemgericht wiskundeonderwijs veronderstelt andere attitudes, andere normen en waarden en andere doelstellingen van de huidige wiskundeleraren. Contexten die betrekking hebben op andere disciplines dan wiskunde confronteren ons met een gebrekkige, fragmentarische kennis van die gebieden en voegen een nieuwe, ongewisse dimensie toe aan het vak van wiskundeleraar.
Scholing van wiskundestudenten en nascholing van leraren gericht op het veranderen van deze situatie zouden veel meer prioriteit moeten krijgen. We menen dat het artikel van De Roest een waardevolle bijdrage is voor een bezinning op deze problematiek. Het artikel maakt ook duidelijk dat de informatie over het Hewet-gebeuren slechts zeer langzaam naar de grote groep leraren doorsijpelt. Mogelijk kan Euclides hierin een grotere rol spelen dan tot nu toe. We nodigen hen die betrokken zijn bij het Hewet-gebeuren uit over hun ervaringen te publiceren. Wel sluiten we de discussie over het artikel van De Roest hierbij.

Frans Dolmans

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

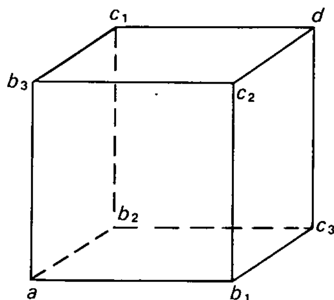
Opgaven

512. n lijnen in het platte vlak snijden elkaar twee aan twee; geen drie ervan gaan door één punt. Ze verdelen het platte vlak in een aantal delen.
a Hoeveel van deze delen zijn eindig en dus veelhoeken?
b Minimaal hoeveel van deze veelhoeken zijn driehoeken?
c Maximaal hoeveel van deze veelhoeken zijn driehoeken?
De derde vraag heb ik toegevoegd, omdat u hem anders zonder twijfel zelf toegevoegd zou hebben. Ik kan hem echter niet beantwoorden. Als u het wel kunt, houd ik mij voor de oplossing aanbevolen.

513. De rij getallen
1 3 3 5 6 7 7 9 9 10
heeft een merkwaardige eigenschap.
10 is het aantal getallen uit de rij dat $\geqslant 1$ is
9 het aantal dat $\geqslant 2$ is
9 het aantal dat $\geqslant 3$ is
7 het aantal dat $\geqslant 4$ is
...
1 het aantal dat $\geqslant 10$ is.
Zo'n rij noemen we een wonderrij. Probeer enig inzicht te krijgen in de manier waarop een wonderrij tot stand komt. Beantwoord daartoe de volgende vraag:
Hoeveel wonderrijen met 14 termen bestaan er?

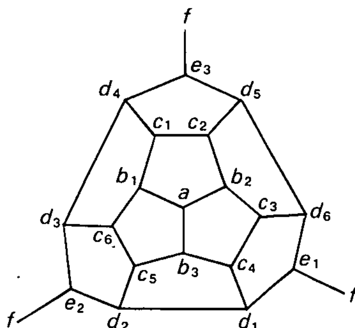
Oplossingen

510. Voeg aan de hoekpunten van een kubus gehele getallen toe zo, dat elk getal gelijk is aan de som van de drie naburige.



De letters in de figuur stellen de getallen voor die aan de hoekpunten toegevoegd zijn.
Stel
$$b_1 + b_2 + b_3 = b$$
$$c_1 + c_2 + c_3 = c$$
Dan is
$$a = b$$
$$b = 3a + 2c \quad \Rightarrow d = -a$$
$$c = d$$
Analoog vinden we dat elk tweetal getallen die toegevoegd zijn aan overstaande hoekpunten, elkaars tegengestelde zijn.
Kies nu a, b_1 en b_2 willekeurig. Daarna
$$b_3 = a - b_1 - b_2$$
$$c_i = -b_i \, (i = 1,2,3)$$
$$d = -a$$
Dan is aan de vraag voldaan.

We verifiëren daartoe dat $c_1 = b_2 + b_3 + d$
Dit volgt onmiddellijk uit $-b_1 = b_2 + b_3 - a$ dus uit $a = b_1 + b_2 + b_3$.
Nu het regelmatige twaalfvlak



De figuur stelt een schema voor van een regelmatig twaalfvlak. De drie punten f moeten geïdentificeerd worden.
De hoekpunten b_i en e_i zijn overstaande hoekpunten, eveneens de hoekpunten c_i en d_i en de hoekpunten a en f.
De letters stellen weer de getallen voor die bij de hoekpunten staan. Stel
$b = \sum b_i,\ c = \sum c_i,\ d = \sum d_i,\ e = \sum e_i$
Dan is

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a = b \\ b = 3a + c \\ c = c + 2b + d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a + c = 0 \\ 2a + d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = d \\ d = d + 2e + c \\ e = 3f + d \\ f = e \end{array}\right\} \Rightarrow 2f + c = 0$$

Ten slotte volgt uit $2a + c = 0$ en $2f + c = 0$ dat $a = f$.
Aan overstaande hoekpunten worden dus gelijke getallen toegevoegd.
Kies nu a, b_1 en b_2 willekeurig. Dan is b_3 bepaald. Kies daarna c_1, c_3 en c_5 willekeurig. Dan zijn c_2, c_4 en c_6 bepaald. Kies ten slotte $d_i = c_i$, $e_i = b_i$ en $f = a$.

Nu verifiëren of aan de vraag voldaan is. We moeten daartoe alleen nog nagaan of de getallen c_i gelijk zijn aan de sommen van de drie naburige.
Dus onderzoeken of (denk aan $d_i = c_i$)

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 + c_2 + c_4 \\ c_2 &= b_2 + c_1 + c_5 \\ c_3 &= b_2 + c_4 + c_6 \\ c_4 &= b_3 + c_3 + c_1 \\ c_5 &= b_3 + c_6 + c_2 \\ c_6 &= b_1 + c_5 + c_3 \end{aligned}$$

Wegens

$$\begin{aligned} b_1 &= a + c_6 + c_1 \\ b_2 &= a + c_2 + c_3 \\ b_3 &= a + c_4 + c_5 \end{aligned}$$

is dit zestal voorwaarden gelijkwaardig met het tweetal

$$a + c_1 + c_3 + c_5 = 0$$
$$a + c_2 + c_4 + c_6 = 0$$

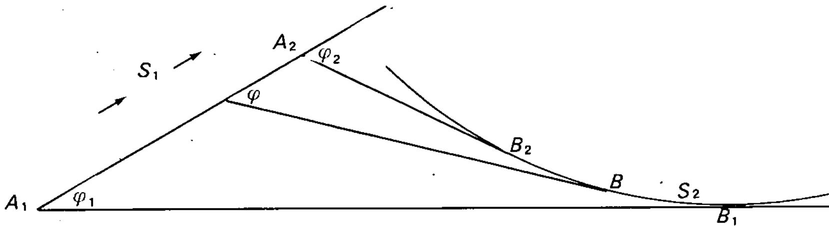
Wegens $2a + c = 0$ is, zodra aan één van deze twee voorwaarden voldaan is, ook aan de andere voldaan. We behoeven er dus alleen maar voor te zorgen dat

$$a + c_1 + c_3 + c_5 = 0$$

Hiervoor kunnen we zorgen door c_5 niet willekeurig te kiezen, maar gelijk aan $-(a + c_1 + c_3)$. Zodat dus blijkt dat we a, b_1, b_2, c_1, c_3 willekeurig kunnen kiezen en de overige getallen dan bepaald zijn.

Sommigen zullen nieuwsgierig zijn, hoe het zit met een regelmatig viervlak, achtvlak en twintigvlak. Daarvoor is het analoge probleem nu gemakkelijk op te lossen. Maar de resultaten zijn niet bijster interessant.

511. S_1 vaart langs l met eenparige snelheid. S_2 vaart steeds in de richting waarin S_1 gezien wordt met een snelheid die even groot is als die van S_1. Voor welke waarden φ zal S_2 het schip S_1 bereiken?



Twee dingen zijn duidelijk:
a als $\varphi = 90°$, dan zal S_1 door S_2 niet bereikt worden;
b of S_1 door S_2 bereikt wordt, is alleen afhankelijk van φ en niet van AB, want vermenigvuldiging van de figuur heeft geen invloed op het al of niet bereikt worden van S_1.

In de figuur is een deel van de baan van S_2 getekend ter weerszijden van B. Toen S_1 in A_1 was, was S_2 in B_1, en toen S_1 in A_2 was, was S_2 in B_2.
Als S_1 door S_2 vanuit B wel/niet bereikbaar is, dan is hij eveneens wel/niet bereikbaar vanuit B_1 en vanuit B_2.
Als bij een of andere φ het schip S_1 wel/niet bereikbaar is, dan is er dus een omgeving van φ (namelijk alle waarden van tussen φ_1 en φ_2) waarbij S_1 wel/niet bereikbaar is.
Onderstel nu, dat er een positieve waarde van φ is waarbij S_1 wel bereikbaar is. De verzameling positieve waarden van φ waarbij S_1 wel bereikbaar is, is dan niet leeg en naar boven begrensd en heeft dus een bovenste grens α. In elke omgeving van α liggen dan waarden van φ waarvoor S_1 wel en ook waarden van φ waarbij S_1 niet bereikbaar is. Contradictie. Voor geen enkele van 0° verschillende waarde van φ is S_1 dus bereikbaar.
(Hetzelfde geldt uiteraard als de snelheid van S_2 kleiner is dan die van S_1. Is de snelheid van S_2 groter dan die van S_1, dan zal S_2 voor elke φ het schip S_1 bereiken).

Boekbesprekingen

H. F. Ledgard, P. A. Nagin en J. F. Hueras, *Het Groot Pascal Spreuken Boek*, 203 pagina's, Academic Service, 1982, Den Haag, prijs *f* 35,–.

Het boek is een zeer geslaagde vertaling van een engelstalige versie: 'Pascal with Style, programming proverbs', alleen de titel had beter vertaald kunnen worden in 'het betere programmeerwerk' o.i.d. Voor een onbekende op het terrein van de informatica is dit boek ongeschikt, maar voor iemand die op de hoogte is van de eerste beginselen van het programmeren, en wel bij voorkeur in Pascal, is het boek uitermate geschikt als wegwijzer in de onbekende wereld van het zogenaamd gestructureerd programmeren. Het boek geeft namelijk aan de hand van een twintigtal zeer zinnige regels aan hoe programma's gemaakt dienen te worden zodat ze leesbaar en helder zijn, en daardoor met weinig fouten behept. Enkele regels zijn: Begin vroeg met de documentatie; werk 'top-down'; gebruik geen goto's; gebruik zinvolle namen; laat iemand anders uw werk lezen.

De vele voorbeeldprogramma's zijn zeer consciëntieus uit het Engels in het Nederlands vertaald, waarbij ook de namen van de identifiers vernederlandsd zijn. Een apart hoofdstuk, ongeveer aan het eind van het boek, is gewijd aan opzet en uitwerking van één behoorlijk moeilijk probleem: een soort damspel. Voor lezers die alleen met BASIC ervaring hebben is dit boek erg geschikt om ze enthousiast voor Pascal te maken.

R. P. van de Riet

Helge Toutenburg, *Prior Information in Linear Models*, Chichester, etc.: Wiley, 1982, 215 p., £ 16,50.

Dit boek heeft een wat misleidende titel. 'Prior information' doet een Bayesiaanse aanpak vermoeden, maar dat is helemaal niet het geval. Op de binnenflap van het stofomslag staat verder: 'Prior information does not here imply a *solely* Bayesian approach but *also* includes, for example, equations and inequalities as well as prior estimates on the unknown parameters'. Deze zin is overgenomen uit het voorwoord van de auteur met invoeging van de door mij gecursiveerde woorden, hetgeen opnieuw misleidend werkt.

Met 'prior information' worden beperkingen bedoeld in de vorm van lineaire of kwadratische gelijkheden of ongelijkheden opgelegd aan de parameters. Ook wordt het geval behandeld dat de aanvullende informatie een stochastisch element bevat.

Na een korte inleiding wordt in hoofdstuk II besproken hoe de klassieke (gegeneraliseerde) kleinste-kwadraten methode in het geval van lineaire beperkingen kan worden aangepast. Vervolgens worden 'mixed estimation' en minimax schattingen behandeld, respectievelijk voor het geval van lineaire stochastische en kwadratische, met stochastische beperkingen. In alle drie hiervoor genoemde gevallen wordt het verband aangegeven met 'ridge regression'. De toepassingen van de besproken methoden liggen vooral op het terrein van de econometrie. Hieraan is dan ook een speciaal hoofdstuk gewijd. De nadruk ligt echter meer op de wiskundige achtergrond dan op toepassingen of voorbeelden.

R. Doornbos

Prof. dr. Marcel Erné, *Einführung in die Ordnungstheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 306 blz., DM 36,–.

De tekst van dit boekje is ontstaan uit twee zomercursussen aan de universiteit van Hannover in 1979 en 1980. Het gaat hier in hoofdzaak over de structuur van geordende verzamelingen en niet zozeer om het verband met andere structuren uit o.a. de algebra en de topologie.

Enige thema's die aan de orde komen: relaties; quasi, half en lineaire ordeningen; homomorfismen; sneden en idealen; welordening; maximumprincipes e.d.

Aan de presentatie van de stof is erg veel aandacht besteed m.n. ook door de vele illustraties en de talrijke oefenopgaven.

W. Kleijne

Mededelingen

De heksen zijn terug!

Feb. '83 is de tweede oplage verschenen van de brochure 'De heksen zijn terug!', over de ervaringen van vrouwen met hun studie in exacte wetenschappen.
Deze brochure richt zich in de eerste plaats op vrouwen die in een exacte wetenschap studeren of werken. De studie-ervaringen zijn uitgeschreven om herkenning en steun te bieden aan exacte vrouwen, die vaak erg geïsoleerd werken in een specifieke mannenwereld. Deze studie-ervaringen worden ook geanalyseerd en geïnterpreteerd in het licht van feministische theorie.
De brochure is eveneens interessant voor iedereen die vanuit haar of zijn eigen ervaringen kritisch wil denken over wetenschap. De eerste oplage was heel snel uitverkocht. Veel mensen hebben op de tweede oplage moeten wachten.
De brochure (90 pagina's) is nu weer te bestellen door het overmaken van *f* 9,50 (inclusief *f* 4,50 verzendkosten) op giro 3730229 t.n.v. Nanda Gilden, Groningen, onder vermelding van 'Exacte vrouwen'.

Nationaal COO-congres 19 mei 1984

Plaats: Katholieke Hogeschool Tilburg — *toegangsprijs: f* 17,50 (voor leden)
Tijd: 10.30 - 16.00 uur — *f* 22,50 (voor niet-leden)
Op zaterdag 19 mei wordt een groot Nationaal Congres gehouden, dat geheel gewijd is aan Computerondersteund Onderwijs. Aan dit congres wordt bijgedragen door alle organisaties die zich in het bijzonder op dit onderwerp richten:
- de Vereniging voor Onderwijs en Computer (VOC)
- de werkgroep Computerondersteund Onderwijs HBO
- de stichting Teachip
- de vereniging voor didactisch computergebruik (DIDACOM)
- het Centrum voor Onderwijs en Informatietechnologie (COI)

Het congres richt zich op de praktijk van computerondersteund onderwijs en met name op de ontwikkeling van lesprogramma's in school en bedrijf, de ervaringen in de school en voorbeelden van effectief lesmateriaal.
Het ochtendprogramma bestaat uit voordrachten, met als thema's:
- lager en buitengewoon onderwijs
- voortgezet onderwijs
- hoger onderwijs
- bedrijfsopleidingen

Het middagprogramma biedt een gevarieerd aanbod van voordrachten, discussies, werkgroepen, demonstraties, film- en videovertoningen en marktpresentaties van lesmateriaal.
Door zijn uitgebreide opzet is dit congres te bestempelen als een unieke uiting van de groeiende plaats die de computer inneemt als hulpmiddel in het onderwijs.
Om technische redenen is de organisatie alleen schriftelijk te bereiken op het volgende adres:
Nationaal COO-congres, Postbus 90153, 5000 LE Tilburg.
Op dit adres kan een congresbrochure worden aangevraagd, die medio april verschijnt. Naar dit adres dienen ook aanmeldingen voor het congres te worden gericht.

Kalender

(zie voor nadere informatie ook altijd de 'Mededelingen' hiervoor en in voorafgaande nummers)
vrijdag 11 mei 1984: examenbesprekingen HAVO-VWO I
maandag 14 mei 1984: examenbesprekingen VWO II
dinsdag 15 mei 1984: examenbesprekingen LBO-c, MAVO-c en -d
woensdag 16 mei 1984: bestuursvergadering NVvW, Utrecht
zaterdag 19 mei 1984: Nationaal COO-congres, Tilburg
zomervakantie 1984: CWI-cursus

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

Drs. H. Broekman, PDI der RU Utrecht, Heidelberglaan 2, Postbus 80-120, 3508 TC Utrecht

E. Kamerich, St Annastraat 95, 6524 EJ Nijmegen

C. H. A. Koster, KU Nijmegen, Toernooiveld, 6525 ED NIJMEGEN

T. Kristel, NLO Interstudie, postbus 30-011, 6503 HN Nijmegen

H. Oostijen, B. Scholten, R. v.d. Valle; CSG 'De Waezenburg', Leek

P. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten

A. van Streun, Hoogbouw WSN, Nettelbosje 2, 9747 AE Groningen